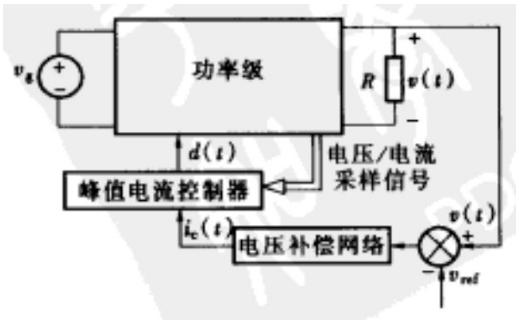
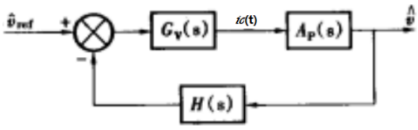
最近，在看张卫平写的《开关变换器的建模与控制》一书。其中的第 6 章第 5 节，讲到电流控制环路的精确模型推导。第 6.5.2 和 6.5.3 分别讲述了等效功率级传递函数的推导，和 BUCK 电路的峰值电流控制模式下的等效功率级传递函数的推导，因为最近正好有一个 AC-DC 的电源在做，所以就想借用这个模型。但是仔细一看，这两小节的内容比较难以理解，所以就按照自己的思路重新整理了一遍。结果都是一样的。

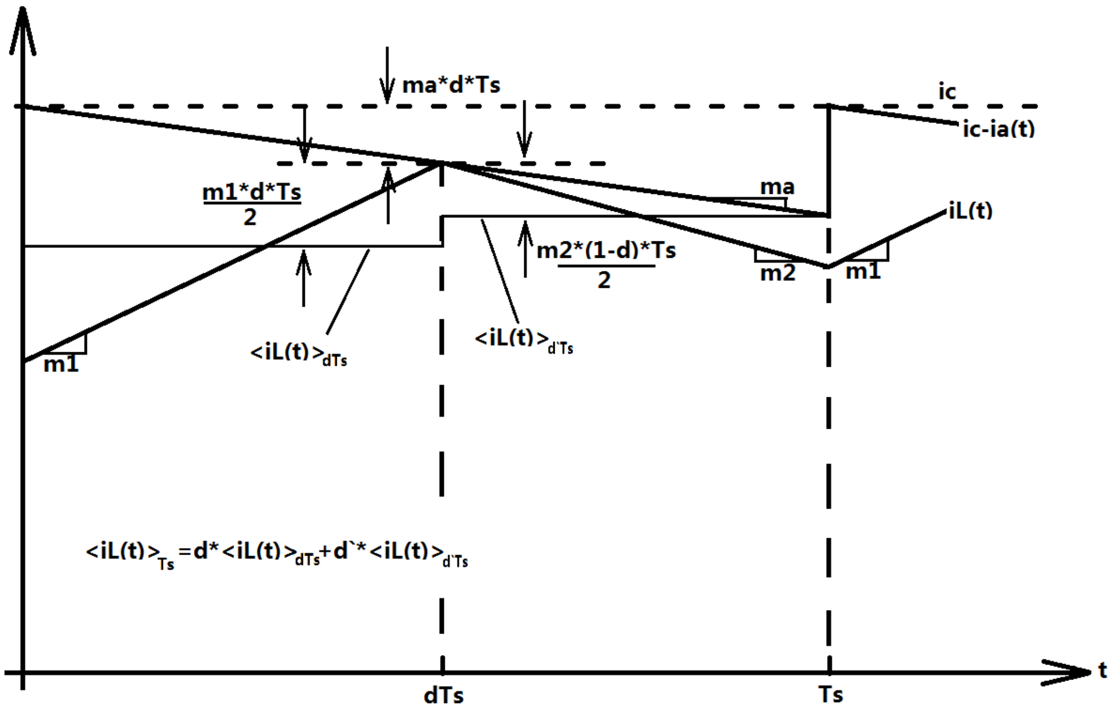


上图就是一个经典的峰值电流型控制的变换器的拓扑。所谓的峰值电流型控制的功率级传递函数是指上图中的峰值电流控制器的传递函数与功率级的传递函数的乘积。如下图：



其中 $A_p(s)$就是功率级传递函数，$G_v(s)$是电压补偿网络的传递函数，H(s)是电压反馈环路的电压采样网络的传递函数。其实求 $A_p(s)$就是求$\frac{ic(s)}{v(s)}$之比。

以书中的基本原理为出发点开始推导。先根据电感电流的平均值与控制电流 ic(t)的关系写出等式。先看图：



其中，在 m1 阶段，即电感电流上升阶段，$<iL(t)>_{dTs}$阶段的平均值为

$$<iL(t)>_{dTs}=<ic(t)>_{Ts}-m_a\times d\times Ts-\frac{m_1\times d\times Ts}{2} \qquad (1)$$

在 m2 阶段，即电感电流下降阶段，$<iL(t)>_{d'Ts}$阶段的平均值为：

$$< iL(\mathrm{t}) >_{d`Ts} = < ic(\mathrm{t}) >_{Ts} - m_a \times d \times Ts - \frac{\mathrm{m_2 \times d` \times Ts}}{2} \qquad (2)$$

又因为，电感电流的平均值为 $<iL(t)>_{Ts}=d*<iL(t)>_{dTs}+d`*<iL(t)>_{d`Ts}$，将公式（1）和（2）带入经过整理得到：

$$< iL(\mathrm{t}) >_{Ts} = < ic(\mathrm{t}) >_{Ts} - m_a \times d \times Ts - \frac{\mathrm{m_1 \times d^2 \times Ts}}{2} - \frac{\mathrm{m_2 \times d`^2 \times Ts}}{2} \qquad (3)$$

该公式是下面推导的起点。

为了获得小信号交流模型，引入下面小信号扰动：

$$\langle i_L(t)\rangle_{T_s} = I_L + \hat{i}_L(t)$$
$$\langle i_c(t)\rangle_{T_s} = I_c + \hat{i}_c(t)$$
$$d(t) = D + \hat{d}(t)$$
$$m_1 = M_1 + \hat{m}_1(t)$$
$$m_2 = M_2 + \hat{m}_2(t)$$

将上面的等式带入（3）中，提出小信号扰动项，并且忽略高阶微小量后可得到：

$$\hat{\mathrm{i}}_\mathrm{L}(\mathrm{t}) = \hat{\mathrm{i}}_\mathrm{c}(\mathrm{t}) - \left(\mathrm{M_a T_s + D \times M_1 \times T_s - D` \times M_2 \times T_s}\right) \times \hat{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{D^2 T_s}}{2}\hat{\mathrm{m}}_1(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{D`^2 T_s}}{2}\hat{\mathrm{m}}_2(\mathrm{t}) \qquad (4)$$

并且：

在 Buck 电路中，$M_1 = \frac{V_g - V}{L}, M_2 = \frac{V}{L}$，则

$$M_1 D = \frac{V_g - V}{L} D = \frac{V_g D D'}{L}, M_2 D' = \frac{V}{L} D' = \frac{V_g D D'}{L}$$

所以有

$$M_1 D = M_2 D'$$

$$\hat{\mathrm{i}}_\mathrm{L}(\mathrm{t}) = \hat{\mathrm{i}}_\mathrm{c}(\mathrm{t}) - \mathrm{M_a T_s}\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{D^2 T_s}}{2}\hat{\mathrm{m}}_1(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{D`^2 T_s}}{2}\hat{\mathrm{m}}_2(\mathrm{t}) \qquad (5)$$

$\hat{m}_1$ 和 $\hat{m}_2$ 的计算公式如下：

Buck 变换器：$\hat{m}_1 = \frac{\hat{v}_g - \hat{v}}{L}, \hat{m}_2 = \frac{\hat{v}}{L}$

Boost 变换器：$\hat{m}_1 = \frac{\hat{v}_g}{L}, \hat{m}_2 = \frac{\hat{v} - \hat{v}_g}{L}$

Buck – boost 电路：$\hat{m}_1 = \frac{\hat{v}_g}{L}, \hat{m}_2 = -\frac{\hat{v}}{L}$

将 m1 和 m2 分别带入公式（5）中。（下面以 Buck 变换器为例，进行推导）

$$\hat{\mathrm{i}}_\mathrm{L}(\mathrm{t}) = \hat{\mathrm{i}}_\mathrm{c}(\mathrm{t}) - \mathrm{M_a T_s}\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{D^2 T_s}}{2} \times \frac{\hat{\mathrm{v}}_\mathrm{g}(\mathrm{t}) - \hat{\mathrm{v}}(\mathrm{t})}{\mathrm{L}} - \frac{\mathrm{D`^2 T_s}}{2} \times \frac{\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{t})}{\mathrm{L}}$$

$$\hat{\mathrm{i}}_\mathrm{L}(\mathrm{t}) = \hat{\mathrm{i}}_\mathrm{c}(\mathrm{t}) - \mathrm{M_a T_s}\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{D^2 T_s}}{2} \times \frac{\hat{\mathrm{v}}_\mathrm{g}(\mathrm{t})}{\mathrm{L}} - \frac{\mathrm{(D`^2 - D^2) T_s}}{2} \times \frac{\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{t})}{\mathrm{L}}$$

$$\hat{\mathrm{i}}_\mathrm{L}(\mathrm{t}) = \hat{\mathrm{i}}_\mathrm{c}(\mathrm{t}) - \mathrm{M_a T_s}\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) - \frac{\mathrm{D^2 T_s}}{2} \times \frac{\hat{\mathrm{v}}_\mathrm{g}(\mathrm{t})}{\mathrm{L}} - \frac{\mathrm{(1 - 2D) T_s}}{2} \times \frac{\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{t})}{\mathrm{L}}$$

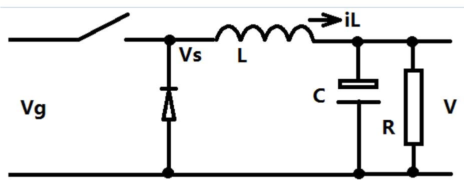
令 $F_m = \frac{1}{M_a T_s}$　$F_g = \frac{D^2 T_s}{2L}$　$F_v = \frac{(1-2D)T_s}{2L}$，所以可以得到：

$$\hat{\mathrm{i}}_\mathrm{L}(\mathrm{t}) = \hat{\mathrm{i}}_\mathrm{c}(\mathrm{t}) - \frac{1}{\mathrm{F_m}}\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{t}) - \mathrm{F_g}\hat{\mathrm{v}}_\mathrm{g}(\mathrm{t}) - \mathrm{F_v}\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{t}) \qquad (6)$$

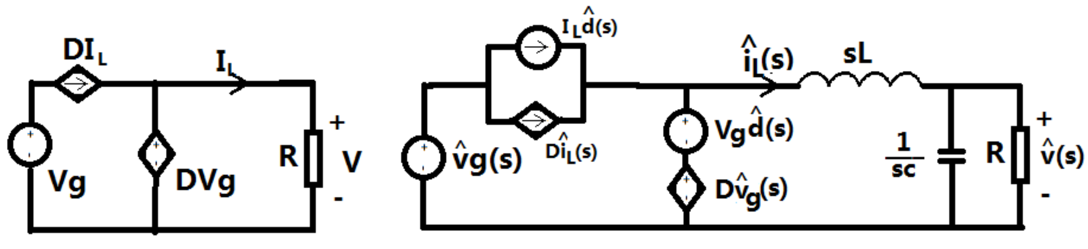
再往下，书上的推导我看不懂了，那就根据公式（6）自己推导。

首先要明白功率级 $A_p(s)$ 其实就是 $\frac{\hat{v}(s)}{\hat{i}_c(s)}$，当然要将公式（6）进行拉普拉斯变换：

$$\hat{\mathrm{i}}_\mathrm{L}(\mathrm{s}) = \hat{\mathrm{i}}_\mathrm{c}(\mathrm{s}) - \frac{1}{\mathrm{F_m}}\hat{\mathrm{d}}(\mathrm{s}) - \mathrm{F_g}\hat{\mathrm{v}}_\mathrm{g}(\mathrm{s}) - \mathrm{F_v}\hat{\mathrm{v}}(\mathrm{s}) \qquad (7)$$



该图的等效模型为：



直流等效模型　　　　交流小信号等效模型

根据交流小信号等效模型可以得到　$\hat{\imath}_L(s)=\frac{sRC+1}{R}\hat{v}(s)$　　　（8）

根据基尔霍夫电压公式可得到：

$$V_g\hat{d}(s)+D\hat{V}_g(s)=sL\cdot\frac{\hat{V}(s)\cdot(sRC+1)}{R}+\hat{V}(s)$$

接着整理：

$$\hat{d}(s)=\frac{\hat{V}(s)\left[s^2LC+s\frac{L}{R}+1\right]-D\hat{V}_g(s)}{V_g}\qquad(10)$$

将公式（8）和（10）带入到公式（7）中：

$$\frac{sRC+1}{R}\hat{v}(s)=\hat{\imath}_c(s)-\frac{1}{F_m}\frac{\hat{V}(s)\left[s^2LC+s\frac{L}{R}+1\right]-D\hat{V}_g(s)}{V_g}-F_g\hat{v}_g(s)-F_v\hat{v}(s)\qquad(11)$$

因为 $A_P(s)=G_{vc}(s)=\frac{\hat{v}(s)}{\hat{\imath}_c(s)}\Big|_{\hat{v}_g(s)=0}$，将$\hat{v}_g(s)=0$带入公式（11）中，

$$\frac{sRC+1}{R}\hat{v}(s)=\hat{\imath}_c(s)-\frac{1}{F_m}\frac{\hat{v}(s)}{V_g}\left[s^2LC+s\frac{L}{R}+1\right]-F_v\hat{v}(s)$$

其中$V_g=\frac{V}{D}$（直流稳态时电路拓扑等式）经过整理得到：

$$\left[\frac{sRC+1}{R}+\frac{D}{F_mV}\left(s^2LC+s\frac{L}{R}+1\right)+F_v\right]\hat{v}(s)=\hat{\imath}_c(s)$$

$$\frac{\hat{v}(s)}{\hat{\imath}_c(s)}=\frac{1}{\left[\frac{sRC+1}{R}+\frac{D}{F_mV}\left(s^2LC+s\frac{L}{R}+1\right)+F_v\right]}$$

$$\frac{\hat{v}(s)}{\hat{\imath}_c(s)}=\frac{1}{\frac{DLC}{F_mV}s^2+\left(\frac{DL}{F_mVR}+C\right)s+\left(\frac{1}{R}+\frac{D}{F_mV}+F_v\right)}$$

$$\frac{\hat{v}(s)}{\hat{\imath}_c(s)}=\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{D}{F_mV}+F_v}\times\frac{1}{\frac{DLC}{F_mV\left(\frac{1}{R}+\frac{D}{F_mV}+F_v\right)}s^2+\left(\frac{DL}{RF_mV}+C\right)\frac{1}{\left(\frac{1}{R}+\frac{D}{F_mV}+F_v\right)}s+1}\qquad(12)$$

$$G_{c0}=\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{D}{F_mV}+F_v}=\frac{V}{D}\times\frac{F_m}{1+\frac{F_mV}{DR}+\frac{F_mF_vV}{D}}$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{DLC}{F_m V\left(\frac{1}{R} + \frac{D}{F_m V} + F_v\right)}}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \times \sqrt{1 + \frac{F_m V}{DR} + \frac{F_m F_v V}{D}}$$

其实到这一步，已经得出最终的功率级的传递函数了，当然可以按照书上的格式写，与公式（12）是等价的。

$$A_P(s) = \frac{G_{c0}}{1 + \frac{s}{Q_c \omega_c} + \left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2} \quad G_{c0} = \frac{V}{D} \frac{F_m}{1 + \frac{F_m V}{DR} + \frac{F_m F_v V}{D}} \quad \omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 + \frac{F_m V}{DR} + \frac{F_m F_v V}{D}} \quad Q_c = R\sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\sqrt{1 + \frac{F_m V}{DR} + \frac{F_m F_v V}{D}}}{1 + \frac{RCF_m V}{DL}}$$

另外，需要注意，如果 buck 变换器有隔离变压器，需要将初级输入电压折算到次级。即

$V_g = \frac{V_{in}}{N}$ 其中 N 为初级匝数与次级匝数之比。

Wkhn　于固安

2019/5/31